Connaître le cours

9 QCM

Pour chaque question, donner la réponse exacte.
On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par $u_n = 4n - 2$.

1. Les valeurs des termes u_0, u_1 et u_2 sont :
a. 0, 1 et 2 **b.** −2, 2 et 6 **c.** − 2, −10 et −42

2. La suite semble être :
a. Quelconque. **b.** Géométrique. **c.** Arithmétique.

3. L'expression de u_{n+1} en fonction de n est :
a. $4n+2$ **b.** $4n - 1$ **c.** $4n + 6$

4. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n =$
a. 1 **b.** 2 **c.** 4

10 On donne ci-dessous les premiers termes u_0, u_1, u_2 et u_3 d'une suite :
– est-il possible que cette suite soit arithmétique ? Ou géométrique ?
– en cas de réponse positive, préciser la relation de récurrence qui peut définir cette suite.

1. 4 ; −1 ; −6 ; −11 … **2.** 1 ; 3 ; 6 ; 10 …
3. $\frac{1}{3}$; 1 ; 3 ; 9 … **4.** 10 ; 5 ; $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{4}$ …

11 Associer à chaque question une méthode possible pour y répondre.

Montrer que (u_n) est arithmétique. •	• Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
Montrer que (u_n) est géométrique. •	• Calculer $u_{n+1} - u_n$.
Montrer que (u_n) n'est pas géométrique. •	• Calculer u_0, u_1, u_2.
Montrer que (u_n) est croissante. •	
Montrer que (u_n) n'est pas arithmétique. •	

12 Compléter les phrases ci-dessous :
1. Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \ldots$
2. Si … alors la suite (q^n) est croissante.
3. Si … alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
4. $1 + q + q^2 + \ldots + q^8 = \ldots$

13 Vrai ou faux ?

On considère une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme u_0.

Préciser si les affirmations sont vraies ou fausses.
1. Si $q > 1$ alors la suite est croissante.
2. La somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_{18}$ contient 18 termes.
3. $u_2 = \frac{u_6}{q^4}$
4. Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) converge vers 0 quelle que soit la valeur de u_0.

Travailler les capacités du chapitre

CAPACITÉ 1 Reconnaître et exploiter une suite géométrique

14 Pour chaque situation ci-dessous, indiquer si elle peut être modélisée par une suite géométrique. Si oui, déterminer la raison de cette suite.
1. Chaque semaine, Justin reçoit 5 € d'argent de poche.
2. Sandrine a placé 1 000 € sur un compte rémunéré à 3 % d'intérêts composés pendant 15 ans.
3. Lors d'une première démarque, le prix de ce short a baissé de 20 %, puis de 30 % lors d'une deuxième démarque.
4. Tous les ans, une ville perd $\frac{1}{10}$ de sa population.

15 Dans chaque cas, montrer que $u_{n+1} = qu_n$.
a. $u_{n+1} - u_n = 0{,}2u_n$ **b.** $u_n = 3 \times 1{,}2^n$ **c.** $u_n = \frac{5}{2^n}$

16 On considère la suite géométrique (u_n) de raison 0,2 et de premier terme $u_0 = 120$.
1. Calculer u_1 et u_2.
2. a. Exprimer u_n en fonction de n.
b. Calculer u_5.

17 On considère la suite géométrique (v_n) de raison 2 et de premier terme $v_1 = 3{,}2$.
1. Calculer v_2.
2. a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, puis v_n en fonction de n.
b. Calculer v_8.

18 On place 1 000 € à intérêts composés au taux annuel de 3 %. Pour tout entier n, on note C_n le capital acquis au bout de n années de placement.
1. Quelle est la nature de la suite (C_n) ?
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n, puis C_n en fonction de n.
3. Quel sera le capital acquis au bout de 15 ans ? Arrondir à l'euro près.

Info Un capital produit des intérêts composés si, à la fin de chaque période, les intérêts générés sont ajoutés au capital pour produire de nouveaux intérêts.

2 Manipuler la formule $1+q+q^2+\ldots+q^n$

19 Vrai ou faux ?

Préciser si les affirmations sont vraies ou fausses, et corriger celles qui sont fausses.

1. $1+3{,}2+3{,}2^2+\ldots+3{,}2^8=\dfrac{1-3{,}2^8}{1-3{,}2}$

2. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$
$=\dfrac{1}{4}\times\left(1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^8\right)$

3. La somme des cinq premiers termes d'une suite géométrique de raison 4 est $\dfrac{1-4^5}{1-4}$.

20 Calculer chacune des sommes suivantes :

1. $1+0{,}2+0{,}2^2+\ldots+0{,}2^7$

2. $1+1{,}3+1{,}3^2+\ldots+1{,}3^6$

3. $1+\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}$

21 Calculer chacune des sommes suivantes :

1. $1+2+4+8+\ldots+64$

2. $1+3+9+27+\ldots+729$

3. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{512}$

22 On considère la suite géométrique (u_n) de raison 0,4 et de premier terme $u_0=60$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.

2. a. Montrer que :
$u_0+u_1+\ldots+u_{15}=60\times(1+0{,}4+0{,}4^2+\ldots+0{,}4^{15})$

b. En déduire la valeur de $u_0+u_1+\ldots+u_{15}$.

23 Avec un tableur, on a obtenu la somme des 9 premiers termes de la suite géométrique (v_n) de raison 1,5 et de premier terme $v_0=2$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Somme
2	v_n	2	3	4,5	6,75	10,13	15,19	22,78	34,17	51,26	149,77

1. a. Quelle formule a-t-on pu saisir en C2 pour être recopiée vers la droite ?

b. Quelle formule a-t-on pu saisir en K2 ?

2. Retrouver par le calcul le résultat affiché en K2.

24 Une entreprise fabrique des coques de téléphones portables. Pour la Saint-Valentin, elle souhaite construire et vendre 5 000 exemplaires d'une édition spéciale dans un délai de 8 semaines.

La première semaine, elle produit 500 exemplaires de ces coques, puis elle augmente sa production de 2 % par semaine.

On note q_n la quantité de coques produites la $n^{\text{ième}}$ semaine. On a donc $q_1=500$.

1. Quelle est la nature de la suite (q_n) ?

2. a. Exprimer q_n en fonction de n.

b. Montrer que :
$q_1+q_2+\ldots+q_8=500\times(1+1{,}02+\ldots+1{,}02^7)$

c. Calculer $q_1+q_2+\ldots+q_8$.

3. L'entreprise aura-t-elle atteint son objectif ?

3 Mettre en œuvre un algorithme de seuil

25 QCM

Pour chaque question, donner la réponse.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}01^n=$

a. 0 **b.** 1 **c.** $+\infty$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1000\times0{,}8^n=$

a. 0 **b.** 1 000 **c.** $+\infty$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} -250\times\left(\dfrac{4}{7}\right)^{n+1}+300=$

a. 0 **b.** 300 **c.** $+\infty$

26 ALGO On considère la suite géométrique (u_n) de raison $q=0{,}25$ et de premier terme $u_0=15$.

1. a. Exprimer u_n en fonction de n.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
Variables N, U
N prend la valeur 0
U prend la valeur 15
Tant que U > 0,1
    N prend la valeur N + 1
    U prend la valeur U × 0,25
Fin Tant que
Afficher N
```

a. Exécuter cet algorithme.

b. Donner une interprétation de l'affichage de cet algorithme.

27 ALGO Une mise en culture de bactéries augmente leur nombre de 25 % chaque jour. Le nombre initial de bactéries est de 2 000.

On note c_n le nombre de bactéries le $n^{\text{ième}}$ jour, on a donc $c_0=2000$.

1. a. Exprimer c_n en fonction de n.

b. En déduire la limite de la suite (c_n).

2. Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche le nombre de jours nécessaires pour que le nombre de bactéries soit au minimum triplé.

```
Variables N, U
N prend la valeur 0
U prend la valeur ···
Tant que ···
    N prend la valeur ···
    U prend la valeur ···
Fin Tant que
Afficher ···
```

28 Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} 2{,}6^n =$ **b.** $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}37^n =$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n =$ **d.** $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} =$

29 Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} 18 \times 0{,}6^n =$ **b.** $\lim\limits_{n \to +\infty} -100 \times 1{,}7^n =$

30 Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} 100 \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^n + 25 =$

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} 10 \times 1{,}05^n - 10\,000 =$

CAPACITÉ 4 Modéliser et étudier une situation à l'aide d'une suite arithmético-géométrique

31 On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par $\begin{cases} u_{n+1} = 0{,}5u_n + 20 \\ u_0 = 150 \end{cases}$

1. Calculer les premiers termes de cette suite.

Info **Casio** : Menu **RECUR** • **TYPE** **F2** • Saisir $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 20$ • **SET** Définir $a_0 = 150$ • **TABLE**

TI : mode **SUITE** • f(x) • Saisir *nMin=0 u(n)=0.5*u(n–1)+20 u(nMin)=150* • 2nde **fenêtre** Saisir DébutTbl=0 puis ΔTbl = 1 • 2nde **graphe**

2. Montrer que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

3. Montrer que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

4. On pose, pour tout entier n, $v_n = u_n - 40$.

a. Calculer v_0, v_1 et v_2.

b. Quelle semble être la nature de (v_n) ?

32 **Vrai ou faux ?**

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par $u_{n+1} = 2u_n - 5$ et de premier terme $u_0 = 10$.

On a calculé les premiers termes de la suite à l'aide d'un tableur.

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	15
4	2	25
5	3	
6	4	
7	5	

Préciser si les affirmations sont vraies ou fausses.

1. La formule contenue dans la cellule B3 pour être recopiée vers le bas peut être =2*B2–5.

2. La cellule B5 contiendra, après recopie, la valeur 35.

3. La suite (u_n) est géométrique.

33 On souhaite modéliser les deux situations suivantes :

Situation 1 : un établissement scolaire voit partir chaque année 30 % de ses élèves et enregistre l'arrivée de 350 nouveaux élèves. En 2015, il y avait 1 000 élèves.

Situation 2 : un capital de 1 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 3 %. Chaque année, on retire 50 € après avoir touché les intérêts.

On note (u_n) et (v_n) les suites modélisant ces situations.

1. Associer chaque situation à la bonne suite sachant que $u_1 = 980$ et $v_1 = 1\,050$.

2. Déterminer l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n et de v_{n+1} en fonction de v_n.

3. a. En déduire le nombre d'élèves dans le lycée en 2017.

b. Calculer le capital placé en banque la 4ᵉ année.

34 Un silo à grains a une capacité maximale de 1 000 m³.

Il contient, avant récolte, 300 m³ de grain et on admet que le stockage de la récolte annuelle augmente le volume contenu dans le silo de 600 m³. De plus, chaque année, 78 % du stock est vendu et 2 % n'est plus commercialisable à cause des détériorations. Le silo contient 900 m³ après récolte.

1. Montrer que les volumes de céréales stockées au bout d'un an et de deux ans sont égaux, après récolte, à 780 m³ et 756 m³.

2. On note v_n le volume (en m³) de céréales stockées au bout de n années dans ce silo. On a donc $v_0 = 900$.

a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

On admet que, pour tout entier n, $v_n = 150 \times 0{,}2^n + 750$.

b. Calculer v_0, v_1 et v_2 avec la forme explicite et vérifier la cohérence des résultats avec ceux trouvés en **1.**

c. Déterminer la limite de la suite (v_n).

d. À long terme, faudra-t-il contruire un nouveau silo ?

Exercer des techniques de base

35 **Calcul mental**

Dans chaque cas, calculer u_1 et u_2.

a. $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 1 \\ u_0 = 3 \end{cases}$

b. $u_n = 100 \times 0{,}8^n$

c. $\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = \dfrac{1000}{v_n} \\ u_n = 120 - v_n \end{cases}$

36 Pour chaque question, on donne l'expression de u_n ; déterminer celle de u_{n+1}.

a. $u_n = 50 \times 1{,}2^{n-1}$

b. $u_n = v_n - 500$

c. $u_n = 0{,}5\, u_{n-1} + 8$

37 Pour chaque question, exprimer u_n en fonction de v_n.

a. $v_n = u_n - 50$

b. $v_n = 0{,}5\, u_n + 4$

c. $v_n = 1\,000 - u_n$